

Διερευνητική Διδακτική Πρόταση Αξιοποίησης Επιστημονικών Δεδομένων στα πλαίσια του STEM: Η Περίπτωση Παραγωγής και Ανίχνευσης Βαρυτικών Κυμάτων

Χ.Θ. Ξενάκης, Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Φ.Ε., μέλος ΕΑΔ, ch_xenakis@yahoo.com

Α.Χ. Ξενάκης, Π.Δ. 407/80 Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας, μέλος ΕΑΔ, axenakis@uth.gr

Περίληψη

Στην παρούσα διδακτική – διερευνητική πρόταση, οι μαθητές/-τριες καλούνται, μέσω της ανάλυσης επιστημονικών δεδομένων από το πείραμα LIGO, να κατανοήσουν την έννοια του βαρυτικού κύματος που παρήχθη από τη συγχώνευση δύο μαύρων τρυπών, να κατανοήσουν τα μεγέθη που το χαρακτηρίζουν και να τα υπολογίσουν, να προσεγγίσουν το μηχανισμό ανίχνευσης του βαρυτικού κύματος και να εκτιμήσουν τα σφάλματα των μετρήσεων που γίνονται κατά την ανίχνευση. Καλούνται, επίσης, με τη βοήθεια κατάλληλων ιστογραμμάτων και γραφικών παραστάσεων που αναπτύχθηκαν μέσω των μοντέλων που προτάθηκαν για τη συγχώνευση των μαύρων τρυπών, να εκτιμήσουν το εύρος τιμών των μαζών των συγκρουσθέντων μαύρων τρυπών, την ενέργεια που εκλύθηκε από το φαινόμενο, καθώς και την ευαισθησία των οργάνων ανίχνευσης (LIGO). Τέλος, προτάθηκε στους μαθητές/-τριες, με τη βοήθεια αλγοριθμικών διαδικασιών, να πειραματισθούν με διάφορα ζεύγη υποθετικά συγκρουομένων μαύρων τρυπών και να ελέγξουν τη «μάζα σφυρίγματος» καθώς και αν τα παραγόμενα βαρυτικά κύματα μπορούν να ανιχνευθούν με την υπάρχουσα ευαισθησία των οργάνων του πειράματος LIGO.

Λέξεις κλειδιά: Χωρο-χρονικό πλέγμα, μαύρη τρύπα, βαρυτικό κύμα, «τέντωμα» χωρόχρονου (strain), μάζα σφυρίγματος (chirp mass), ενέργεια βαρυτικής ακτινοβολίας, θόρυβος υποβάθρου, συμβολόμετρο βαρυτικών κυμάτων (ανιχνευτής LIGO), ακτίνα Schwarzschild.

Abstract

In this teaching-exploratory proposal, pupils are invited, through the analysis of LIGO experimental data, to understand the meaning of the gravitational wave produced by the merger of two black holes, to understand the magnitude of the characterize and estimate them, approach the gravitational wave detector, and estimate errors in the measurements made during detection. They are also invited, with the help of appropriate histograms and graphs developed through the models proposed for the merger of black holes, to estimate the range of masses of the conflicted black holes, the energy emanating from the phenomenon, as well as sensitivity of detection organs (LIGO). Finally, it was suggested that students, with the help of algorithmic procedures, experiment with several pairs of hypothetically colliding black holes and control the "whistle mass" as well as whether the generated gravitational waves can be detected by the existing sensitivity of the LIGO organs.

Keywords: Space-time grid, black hole, gravitational wave, space-time strain, chirp mass, gravitational energy, background microwave noise, LIGO detector, Schwarzschild beam.

1. Εισαγωγή

Οι διερευνητικές εργασίες στην εκπαίδευση βασίζονται σε μια αλληλουχία διδακτικών και παιδαγωγικών αρχών (π.χ. Μασσαγγούρας, 2004 και 2012, Spanos and Xenakis, 2013, Ψυχάρης και Καλοβρέκτης, 2018), οι οποίες επιγραμματικά είναι:

1. η **αρχή της ανακαλυπτικής μάθησης**, όπου στην παρούσα πρόταση πρόκειται για καθοδηγούμενη ανακαλυπτική μάθηση (scaffolding) όπου τα διάφορα ερωτήματα τίθενται σταδιακά με την καθοδήγηση και τη βοήθεια του επιβλέποντα εκπαιδευτικού,
2. η **διαθεματικότητα** (Μασσαγγούρας, 2004), όπου στην τρέχουσα εργασία αναδεικνύονται γνωστικά πεδία από το χώρο της φυσικής, των μαθηματικών, της αστρονομίας και της πληροφορικής,
3. η **αρχή της διαφοροποίησης** του περιεχομένου, σύμφωνα με την οποία (Spanos and Xenakis, 2013), η διδακτική και παιδαγωγική διαδι-

κασία πρέπει να μπορεί να προσαρμοσθεί σε διάφορα γνωστικά επίπεδα και σε διάφορες ηλικιακές ομάδες,

4. η **ομαδοσυνεργατικότητα** αποτελεί μια ακόμη βασική αρχή, στην οποία οφείλει να βασίζεται κάθε διδακτική πρόταση διερευνητικής δομής.

Το «σενάριο μαθήματος» που προτείνεται, σχετίζεται με την ένταξη της διαδικασίας της μάθησης σε ένα σύνθετο μεν, αλλά ρεαλιστικό και πραγματικό περιβάλλον έρευνας, δηλαδή προσπαθεί να εμπλέξει τους μαθητές/-τριες σε ρεαλιστικά – αυθεντικά καθήκοντα ενός μικρού ερευνητή (Ψυχάρης και Καλοβρέκτης, 2018).

Έτσι στο πλαίσιο της εφαρμογής της συγκεκριμένης διδακτικής πρότασης στη χειμερινή Σχολή Αστρονομίας του Βόλου που υλοποιείται από την Εταιρεία Αστρονομίας και Διαστήματος (Ε.Α.Δ.), κατά τη διάρκεια της μαθησιακής και διδακτικής ακολουθίας, θέταμε, ως δάσκαλοι, συνεχώς ερωτήματα (Flick and Lederman, 2006) του τύπου:

- Έχουν εμπλακεί οι μαθητές/-τριες στην τυπική επιστημονική διαδικασία;

- *Είναι οι διδακτικές στρατηγικές και οι σχεδιασμοί μας ενταγμένα στην επιστημονική διαδικασία;*
- *Δίνουμε τη δυνατότητα στους μαθητές/-τριες που συμμετέχουν, να διερευνούν, να παράγουν, να εξηγούν, να αξιολογούν και να τροποποιούν τη γνώση που τους παρέχεται;* (National Research Council, USA, 2007).

Εξάλλου, είχαμε πάντοτε ως οδηγό το γεγονός ότι ο γενικότερος στόχος της διδακτικής των Επιστημών είναι να δίνει την ευκαιρία στους εκπαιδευόμενους να αποκτούν ευχέρεια στη δόμηση νέων εννοιών, στη μοντελοποίηση, στην επίλυση προβλήματος και στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων (The Pathway project, 2013).

Τι είναι, άλλωστε, η ανακαλυπτική – διερευνητική μέθοδος που προσπαθήσαμε να εφαρμόσουμε (Papert, S., 1998) παρά η εντατική προσπάθεια για την αναγνώριση του προβλήματος, η κριτική αντιμετώπιση των πειραματικών και παρατηρησιακών δεδομένων, η εύρεση εναλλακτικών εξηγήσεων, όπου χρειάζεται, καθώς και η κατασκευή ερμηνευτικών μοντέλων ; (Ψυχάρης και Καλοβρέχτης, 2018) .

Συνεπώς, οι γενικοί διδακτικοί στόχοι που κλήθηκε να εξυπηρετήσει η παρούσα εργασία, συνοψίζονται στην επιστημονική προσέγγιση με την ανάλυση πραγματικών πειραματικών δεδομένων μέσω της ακολουθίας: παρατήρηση – μετρήσεις – επεξεργασία μετρήσεων – εκτίμηση σφαλμάτων - κατασκευή μοντέλου - εφαρμογή και έλεγχος του μοντέλου, δηλαδή ερμηνεία και κατανόηση του φυσικού κόσμου και των φαινομένων του δια μέσου αντικειμενικών και επαναλήψιμων διεργασιών.

Τα στάδια της ανακαλυπτικής – διερευνητικής διδακτικής πρότασης που εφαρμόσαμε ήταν περιληπτικά τα εξής:

1. **Ερωτήσεις**, επιστημονικά προσανατολισμένες, καθοδηγούμενες ή δομημένες.
2. **Συλλογή δεδομένων – απόδειξη**. Εδώ ήταν δομημένη, δηλαδή, τα δεδομένα δόθηκαν από τον εκπαιδευτικό.
3. **Ανάλυση δεδομένων**, που ήταν επίσης δομημένη, δηλαδή οι μαθητές/-τριες καθοδηγήθηκαν με ποιους τρόπους να πραγματοποιήσουν την ανάλυση, λόγω της πρωτοτυπίας και της δυσκολίας του θέματος.
4. **Εξήγηση**, που ήταν καθοδηγούμενη.
5. **Σύνδεση**, που ήταν εν μέρει ανοικτή, δηλαδή οι μαθητές/-τριες προχώρησαν μόνοι τους στη σύνδεση της εξήγησης με την επιστημονική γνώση, αλλά και εν μέρει καθοδηγούμενη, δηλαδή οι μαθητές/-τριες παρήγαγαν τη σύνδεση μέσα από πηγές που παρέχονταν από τον εκπαιδευτικό.
6. **Επικοινωνία**, που επίσης ήταν εν μέρει καθοδηγούμενη, δηλαδή οι μαθητές/-τριες επικοινωνούν και αιτιολογούν την εξήγηση με σχετική βοήθεια από τον εκπαιδευτικό, αλλά και εν μέρει δομημένη όπου ο εκπαιδευτικός παρείχε τα βήματα για να επικοινωνήσουν και να αιτιολογήσουν την εξήγηση. Τέλος,
7. **Αναστοχασμός**, που και εδώ ήταν υβριδικός, δηλαδή και καθοδηγούμενος, όπου ο εκπαιδευτικός παρείχε κάποιες οδηγίες για τη δόμηση της αναστοχαστικής διαδικασίας, αλλά και δομημένος για τα δυσκολότερα σημεία, όπου ο εκπαιδευτικός παρείχε όλα τα βήματα για τη δόμηση της αναστοχαστικής διαδικασίας.

2. Ταυτότητα της διερευνητικής εργασίας

Πρόκειται για μια διερευνητική δραστηριότητα ανάλυσης επιστημονικών δεδομένων, που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές/-τριες να εργασθούν ατομικά ή σε ομάδες προκειμένου να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια και ορισμένες από τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά των βαρυτικών κυμάτων που προήλθαν από τη συγχώνευση δύο βαρυτικά αλληλεπιδρώντων μαύρων τρυπών, καθώς και να κατανοήσουν το μηχανισμό ανίχνευσης των κυμά-

των όπως επίσης και να εκτιμήσουν τα σφάλματα που υπεισέρχονται κατά τις μετρήσεις.

Τα δεδομένα που επιλέχθηκαν για ανάλυση, προέρχονται από τα συμβάντα **GW151226** (από το Gravitational Waves 2015-12-26) και **GW150914** (G.W. 2014-09-15). Αφορμή αλλά και πηγή πληροφόρησης για τη δημιουργία του προτεινόμενου διδακτικού – διερευνητικού σεναρίου αποτέλεσαν τα θέματα εξετάσεων της Ανάλυσης Δεδομένων για την 4^η φάση του Πανελληνίου Μαθητικού Διαγωνισμού Αστρονομίας και Αστροφυσικής (‘Πτολεμαίος’), τα οποία μας απέστειλε τον Απρίλιο του 2016 η συνεργάτης της Εταιρείας Αστρονομίας και Διαστήματος, Δρ. Χαρά Παπαθανασίου, από το Πανεπιστήμιο του Leyden της Ολλανδίας, όπου εργάζεται.

Είναι αυτονόητο ότι στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται ένα διδακτικό σενάριο το οποίο εμπλέκει τις Αρχές της Διερευνητικής Μάθησης (Inquiry Based Science Education – ISBE) και της Διαθεματικής προσέγγισης της γνώσης με τη βοήθεια της καθοδηγούμενης ανακάλυψης.

- **Κοινό που απευθύνεται:** Μαθητές Λυκείου.
- **Περιβάλλον:** Σχολική τάξη, σπίτι.
- **Χρονική διάρκεια:** 8-10 διδακτικές ώρες.
- **Τεχνικές απαιτήσεις:** Πρόσβαση στο διαδίκτυο, βασικές υπολογιστικές γνώσεις στα Μαθηματικά και τη Φυσική, βασικές γνώσεις προγραμματισμού, εξοικείωση στους υπολογισμούς με τη χρήση ενός scientific calculator , εγκυκλοπαιδικές γνώσεις αστρονομίας και αστροφυσικής.
- **Σύνδεση με τη διδακτέα ύλη:** Φυσική Λυκείου, Μαθηματικά Λυκείου, Πληροφορική Γυμνασίου – Λυκείου
- **Διδακτικοί στόχοι:**

α) Ανάκληση και συνδυαστική χρήση θεωρητικών γνώσεων από τη Φυσική, τα Μαθηματικά και την Αστρονομία.

β) Ανάπτυξη υπολογιστικών δεξιοτήτων και κριτικής σκέψης.

γ) Ανάπτυξη της ικανότητας ερμηνείας γραφικών παραστάσεων και ιστογραμμάτων και απεικόνιση δεδομένων σε γραφήματα .

δ) Εξοικείωση με την ανάλυση δεδομένων από πραγματικά ερευνητικά προγράμματα, τα οποία οι μαθητές/-τριες καλούνται να αξιοποιήσουν κριτικά, όπου με τη μέθοδο της ‘καθοδηγούμενης ανακάλυψης’ θα αχθούν σε νέα ευρήματα, νόμους και συμπεράσματα .

ε) Εξοικείωση με την έννοια του σφάλματος στις πειραματικές μετρήσεις και με την έννοια των ορίων της ευαισθησίας των οργάνων μέτρησης .

στ) Ανάπτυξη νέων στάσεων, αξιών και προσδοκιών.

Πορεία της εργασίας (Βήματα)

1. Αρχικά προσδιορίστηκε το διδακτικό αντικείμενο, δηλαδή η δημιουργία και ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων. Οι μαθητές/-τριες καθοδηγήθηκαν να βρουν στο διαδίκτυο και σε επιλεγμένα sites, πληροφορίες για τις μαύρες τρύπες, για τη συγχώνευση μαύρων τρυπών και την παραγωγή βαρυτικών κυμάτων καθώς και ορισμένες πληροφορίες για το νέο κλάδο της αστροφυσικής που ανατέλει, δηλαδή για την «αστρονομία βαρυτικών κυμάτων» και τα πιθανά οφέλη που αναμένονται από την ανάπτυξή της.
2. Τους προτρέψαμε, ακόμη, να βρουν στοιχεία για τους ανίχνευτες LIGO και τη λειτουργία τους, την ευαισθησία που παρουσιάζουν καθώς και τις πιθανές πηγές σφαλμάτων στα πειραματικά δεδομένα που καταγράφουν.
3. Τους ενημερώσαμε ότι αρχές του 2016, ανακοινώθηκε η πρώτη ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων (G.W.) από την ομάδα του LIGO στην οποία συμμετείχαν πάνω από

- 1.000 επιστήμονες από όλο τον κόσμο, μεταξύ των οποίων και εξέχοντες Έλληνες αστροφυσικοί, μηχανικοί, μαθηματικοί και ειδικοί της πληροφορικής και τους ζητήσαμε, με τη δική μας καθοδήγηση, να ακολουθήσουν τα χνάρια της ερευνητικής ομάδας του LIGO και να νιώσουν τη χαρά της ανακάλυψης των G.W. που είχαν προβλεφθεί 100 χρόνια νωρίτερα από τον Α. Einstein στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας.
4. Στη συνέχεια, με κατάλληλες ερωτήσεις και συζήτηση, προσπαθήσαμε να ανιχνεύσουμε την προαπαιτούμενη βασική γνώση που έπρεπε να έχουν στη Φυσική, στα Μαθηματικά, στην Αστρονομία και στην Πληροφορική και να αναδείξουμε τις παρανοήσεις ή τις λανθασμένες νοητικές αναπαραστάσεις που είχαν για τα κύματα γενικώς (γνωστικά εμπόδια).
 5. Τους τονίσαμε και τους ξεκαθαρίσαμε ότι τα βαρυτικά κύματα δεν μοιάζουν με τα ηλεκτρομαγνητικά ή τα ηχητικά που ήδη γνώριζαν, αλλά είναι ιδιαίτερα κύματα που μεταβάλλουν το χωροχρόνο (χωροχρονικό πλέγμα), τον οποίο εκτείνουν ελάχιστα προς μια κατεύθυνση, συρρικνώνοντάς τον ταυτόχρονα στην κάθετη (και μετά αντίθετα), περιοδικά.
 6. Προσπαθήσαμε, τέλος, με συγκεκριμένα παραδείγματα να τους δώσουμε να καταλάβουν ότι αυτή η περιοδική μεταβολή του πλέγματος του χωροχρόνου είναι απειροελάχιστη, ωστόσο όμως, μπορεί να μετρηθεί. Τους είπαμε ότι, από ακριβείς υπολογισμούς, η απόσταση ενός μέτρου στο χωροχρόνο, στις εγκαταστάσεις του πειράματος μέτρησης (LIGO), τεντώνεται – συρρικνώνεται κατά 10^{-22} m., προτρέποντάς τους να το συγκρίνουν με τη διάμετρο του ατόμου που είναι 10^{-10} m. και τη διάμετρο του πυρήνα που είναι της τάξεως του 10^{-15} m. (!) ώστε να συνειδητοποιήσουν τη δυσκολία του εγχειρήματος της ανίχνευσης αλλά και τις πηγές των σφαλμάτων που προκύπτουν από το *θόρυβο υπόβαθρου* (παρεμβολές) .

Στο θόρυβο υποβάθρου, συνήθως περιλαμβάνονται: μικροσεισμοί (φυσικοί ή τεχνητοί, με συχνότητες ~ 10 Hz), θερμικές παρεμβολές (με συχνότητες $\sim 80-100$ Hz) και θόρυβος της κβαντικής φύσης του φωτός (υψηλές συχνότητες). Ήταν ένα σοβαρό πρόβλημα που ξεπεράστηκε μετά την αναβάθμιση του συστήματος LIGO το 2014. Τους ορίσαμε, ακόμη, τη φυσική ποσότητα που περιγράφει την ένταση του G.W. (δηλ. το ‘‘πλάτος ταλάντωσής’’ του) που ονομάζεται διεθώς ‘‘strain’’ και ορίζεται ως το ποσοστό του ‘‘τεντώματος’’ του χωροχρόνου σε σχέση με τις αρχικές διαστάσεις του, απουσία του βαρυτικού κύματος, δηλαδή το ορίσαμε ως το κλάσμα της σχετικής αλλαγής μηκών στις διευθύνσεις x και ψ στο επίπεδο και τους δώσαμε τους σχετικούς τύπους:

$$h_x = (\Delta x)/x_0 \text{ και } h_\psi = (\Delta \psi)/\psi_0$$

για τους δύο βραχίονες x και ψ του *συμβολομέτρου βαρυτικών κυμάτων*, δηλαδή του ανιχνευτή LIGO (Laser Interferometer Gravitational – Wave Observatory).

Το βαρυτικό κύμα, κατανόησαν, ότι θα συμπύκνει τον ένα βραχίονα x και θα εκτείνει τον άλλο, δηλαδή τον κάθετο ψ , κατά h_x και h_ψ αντιστοίχως όταν το G.W. θα επιδράσει με το όργανο ανίχνευσης και μέτρησης (LIGO). Έτσι μετρήθηκε η τοπική διαταραχή του χωροχρόνου και αυτό το θεωρήσαμε σημαντική νοητική κατάκτηση για τους μαθητές /-τριες .

Αξιολόγηση της εργασίας: Η αξιολόγηση, σε ομαδικό επίπεδο, έγινε από τα συμπληρωμένα φύλλα εργασίας που παρήγαγαν οι μαθητές/-τριες καθώς και από την

ερμηνεία των διαγραμμάτων, την εκτίμηση των σφαλμάτων, τις προβλέψεις που παρήγαγαν, τον προγραμματισμό που πρότειναν για την επίλυση ερωτημάτων, κλπ. Σε ατομικό επίπεδο, η αξιολόγηση προέκυψε από την παρακολούθηση της ενεργού συμμετοχής του καθενός καθ’ όλη τη διάρκεια της διερευνητικής διαδικασίας.

Στο τέλος, οι μαθητές/-τριες κλήθηκαν να απαντήσουν ατομικά σε ένα ερωτηματολόγιο με ερωτήσεις κλειστού και ανοιχτού τύπου πάνω στα κύρια σημεία του διδακτικού σεναρίου και να επισημάνουν τις τυχόν δυσκολίες που συνάντησαν. Οι απαντήσεις των ερωτηματολογίων χρησιμοποιήθηκαν και αξιοποιήθηκαν για την ανατροφοδότηση και τη βελτίωση της όλης διαδικασίας (Α. Παχούλη, 2016), μέρος της οποίας εφαρμόστηκε και στο θερινό Σχολείο Αστρονομίας το επόμενο έτος .

3. Προεργασία και καθοδήγηση ερωτημάτων

Για την προετοιμασία, διεξαγωγή και καθοδήγηση ερωτημάτων ακολουθήσαμε τα παρακάτω **στάδια**:

Στάδιο 1: Ακολουθώντας την τυπική διαδικασία διαδοχής των διδακτικών φάσεων στη διερευνητική μάθηση, επιχειρήθηκε κατ’ αρχήν η διέγερση ερωτημάτων με αφορμή τις πληροφορίες που ανέκτησαν οι μαθητές/-τριες από το διαδίκτυο, όπως τους είχε υποδειχθεί, για τη βαρυτική αλληλεπίδραση ζεύγους μαύρων τρυπών, οι οποίες καθώς περιφέρονται η μία γύρω από την άλλη, χάνουν σταδιακά ενέργεια και στροφορμή, με αποτέλεσμα όλο και περισσότερο να πλησιάζουν μεταξύ τους. Αυτό οδηγεί τελικά στην ενσωμάτωση των δύο τρυπών με μεγάλη απώλεια ενέργειας η οποία δημιουργεί τα βαρυτικά κύματα τα οποία ανιχνεύουμε.

Στάδιο 2: Δόθηκαν επίσης στους μαθητές/-τριες οι **εξι-σώσεις** που περιγράφουν προσεγγιστικά μεν αλλά με αρκετή ακρίβεια τις τροχιές των μαύρων τρυπών λίγο πριν τη σύγκλιση. Τονίσαμε στους μαθητές/-τριες ότι κατά σύμβαση και για λόγους ευκολίας, μπορούμε να μετράμε το χρόνο t (time) από τη στιγμή της σύγκλισης – συγχώνευσης των μαύρων τρυπών. Άρα, στα αντίστοιχα διαγράμματα που απεικονίζουν το συμβάν, τα γεγονότα πριν τη σύγκλιση, θα εμφανίζονται με αρνητικό πρόσημο στο χρόνο, όπου τουλάχιστον έχει γίνει η παραπάνω σύμβαση.

Στάδιο 3: Οι εξισώσεις που ακολουθούν, είναι αυτές που δόθηκαν, μαζί με τις απαιτούμενες επεξηγήσεις και πληροφορίες

Σε μια περίοδο περιφοράς P_{orb} , το σύστημα παράγει **δύο (2)** περιόδους βαρυτικού κύματος (G.W.), δηλαδή:

$$P_{orb} = 2 P_{GW} \quad (1)$$

Η περίοδος περιφοράς P_{orb} μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση:

$$P_{orb}(t) = \left(P_0^{\frac{8}{3}} - \frac{8}{3} kt \right)^{\frac{3}{8}} \quad (2)$$

όπου P_0 είναι η περίοδος ακριβώς πριν τη σύγκλιση και k είναι μία σταθερά ίση με:

$$k = \frac{96}{5c^5} (2\pi)^{\frac{8}{3}} (GM_\sigma)^{\frac{5}{3}} \quad (3)$$

Το M_σ ονομάζεται «μάζα σφυρίγματος» ή «μάζα τιπιβίσματος» (γιατί αν μετατρέψουμε το βαρυτικό σήμα σε συχνότητα ήχου, θυμίζει... σφύριγμα, του οποίου το ηχοχρώμα εξαρτάται από αυτή την ποσότητα !). Η έκφραση της M_σ δίνεται από το συνδυασμό των μαζών των δύο μαύρων τρυπών M_1 και M_2 που συγχωνεύονται, δηλαδή:

$$M_0 = (M_1 M_2)^{3/5} \cdot (M_1 + M_2)^{1/5} \quad (4)$$

Δόθηκε επίσης στους μαθητές/-τριες η κυματομορφή του βαρυτικού κύματος (σήματος) της πηγής GW151226, όπου εικονίζεται το τελευταίο δευτερόλεπτο πριν τη σύγκλιση των ωών. Στον κατακόρυφο άξονα εμφανίζεται το strain, ενώ στον οριζόντιο ο χρόνος. Στα ένθετα φαίνονται τμήματα της κυματομορφής σε μεγέθυνση που θα βοηθήσουν τους μαθητές/-τριες να μετρήσουν/εκτιμήσουν διάφορα χαρακτηριστικά μεγέθη του G.W. (βλέπε εικόνα 1). Τα ερωτήματα και η καθοδηγούμενη ανακάλυψη:

Με τη βοήθεια της εικόνας 1, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

- i. **Μετρήστε/** εκτιμήστε την περίοδο του βαρυτικού σήματος P_{GW} σε δύο χρονικές στιγμές: $-0,9$ sec και $-0,44$ sec πριν τη σύγκλιση ($t=0$). Τα ένθετα στην εικ. 1 θα σας βοηθήσουν.
- ii. **Υπολογίστε** κατόπιν τις αντίστοιχες περιόδους τροχιάς P_{orb} (εξίσωση 2). Αναμένουμε ως **απαντήσεις** τις ακόλουθες, συμπεριλαμβανομένης και της εκτίμησης σφάλματος:

Απαντήσεις:

Από τα ένθετα, το σφάλμα κατ’ εκτίμηση σε κάθε άκρο του ένθετου είναι περίπου +/- 0,005 sec. Άρα, για κάθε περίοδο, περίπου 0,007 sec (δηλ. μεταξύ 0,005 s. και 0,01 s.). Συνεπώς, γύρω από το $t=-0,9$ sec., $P_{GW} \approx (0,08/3 \pm 0,007/3)$ sec. Ομοίως, γύρω από το $t= -0,44$ sec θα έχουμε: $P_{GW} = 0,08/4 \pm 0,007/3$.

Άρα, P_{orb} από το πρώτο ένθετο γύρω στο $t= -0,9$ s. (με βάση την εξ. 1) $P_{orb} \approx (0,16 \pm 0,014)/3$ sec $\approx (53,4 \pm 1,4)$ ms. Ομοίως, P_{orb} από το δεύτερο ένθετο γύρω στο $t= -0,44$ s. (με βάση την εξ. 1). $P_{orb} \approx (40,93 \pm 0,18)$ ms

- iii. Από τις προηγούμενες μετρήσεις και με βάση την εξ. 2, **υπολογίστε** την σταθερά k . Αναμένουμε τις εξής **απαντήσεις**:

Απαντήσεις:

Την περίοδο P_0 την υπολογίζουν από το τρίτο ένθετο (εικ. 1) γύρω από το $t=0$ s. Κατόπιν, αντικαθιστώντας διαδοχικά τις τιμές P_{orb} και P_{orb} και P_0 στην εξίσωση 2 και αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις που προκύπτουν, παίρνουμε για τη σταθερά k τιμή ίση περίπου με $k \approx 1,67 \times 10^{-4} \text{ (sec)}^{5/3}$. Τους ζητήσαμε να εκτιμήσουν και το σφάλμα στην τιμή της k , αλλά δυσκολεύτηκαν. Τους υποδείξαμε να προσδιορίσουν πρώτα το $\Delta P_{orb}/P_{orb} \approx 2,6 \times 10^{-2}$ και κατόπιν να υπολογίσουν το $\Delta k/k$, αλλά και πάλι βρήκαν υπολογιστικές δυσκολίες. Με περαιτέρω διευκόλυνση, οδηγήθηκαν τελικά σε μια εκτίμηση του $\Delta k/k$ ίση περίπου με 7%, που θεωρήθηκε αποδεκτό.

Άρα, τελικά έχουμε για τη σταθερά K μια τιμή με εκτίμηση σφάλματος ίση με: $k = (1,67 \pm 0,12) \cdot 10^{-4} \text{ (sec)}^{5/3}$

- iv. Κατόπιν τους ζητήθηκε να **υπολογίσουν** τη «μάζα σφυρίγματος» M_0 σε μάζες Ηλίου M_H με τη βοήθεια της εξ. 3

Απαντήσεις: Οι υπολογισμοί ήταν σχετικά εύκολοι και για εδωσαν τιμή για τη ‘‘μάζα σφυρίγματος’’ ίση με 9,8 M_H . Όμως και εδώ δυσκολεύτηκαν να μας δώσουν μόνοι τους μια εκτίμηση σφάλματος για τη M_0 . Τους υποδείξαμε ότι αν προσδιορίσουν το $(\Delta k/k)$ από την εξίσωση 3 και το εξισώσουν με το 0,07 που είχαν ήδη βρει στο iii) ερώτημα, θα μπορούσαν να προσδιορίσουν το $(\Delta M_0/M_0)$. Δύο μόνο μαθητές βρήκαν ότι $(\Delta M_0/M_0) = (3/5) \cdot (\Delta k/k)$, οπότε προέκυψε ότι: $M_0 \approx (9,8 \pm 0,4) M_H$.

- v. Πριν θέσουμε την παρακάτω ερώτηση, τους δώσαμε την πληροφορία ότι το βαρυτικό σήμα ενισχύεται όσο οι δύο «μάζες» πλησιάζουν η μία την άλλη. Τους είπαμε ότι η ένταση (πλάτος της ταλάντωσης) αυξάνεται με το χρόνο. Μάλιστα,

για τις τροχιές πριν οι δύο μαύρες τρύπες να έχουν πλησιάσει πάρα πολύ μεταξύ τους, το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$A(t) = \frac{2(GcM)^{5/3}}{c^4 d} \left(\frac{\pi}{P_{GW}} \right)^{2/3} \quad (5)$$

όπου d = απόσταση του συστήματος από τη Γη. Τους ζητήσαμε κατόπιν, να απαντήσουν στα παρακάτω ερωτήματα :

- *Κάντε μια εκτίμηση του πλάτους και της αντίστοιχης περιόδου του σήματος, χρησιμοποιώντας μια από τις στιγμές του ερωτήματος i), δηλαδή ή $t=-0,9$ s. ή $t=-0,44$ s.*
- *Τους ζητήσαμε ακόμη να κάνουν και μια εκτίμηση του σφάλματος στο πλάτος.*
- *Αναμέναμε ως απάντηση γύρω στο $t= -0,9$ s. με $P_{orb} = (0,16/3)$ sec., μια τιμή για το $A(t) \sim (0,8 \pm 0,1) \cdot 10^{-22}$ m.*

Παρατηρήσαμε ότι υπήρξε πάλι δυσκολία στην εκτίμηση σφάλματος, η οποία ξεπεράστηκε με περαιτέρω καθοδήγηση.

Τέλος, τους ζητήσαμε να υπολογίσουν την απόσταση της πηγής GW151226 με το αντίστοιχο σφάλμα, σε m, ly (έτη φωτός) και pc (παρσέκ), ώστε να εξοικειωθούν και με τις αστρονομικές μονάδες.

Οι απαντήσεις που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες:

Απαντήσεις:

Από το $A(t)$ της εξ. 5, με αντικατάσταση των τιμών και λύνοντας ως προς d , βρέθηκαν σχετικά εύκολα οι τιμές της απόστασης στην τάξη μεγέθους που αναμένονταν, δηλαδή: $d \approx 10^{25}$ m $\approx 1,81$ Gyr (δισεκ. έτη φωτός) = 560 Mpc (εκατομ. παρσέκ), αφού έλαβαν υπόψη ότι 1 pc $\approx 3,26$ ly. Ομοίως για $t= -0,44$ s., $P_{GW} \approx 0,02$ s. και $A(t) \approx (1,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-22}$ m, προέκυψε $d \approx 1,66 \cdot 10^{25}$ m ή $d \approx 540$ Mpc. Το σφάλμα υπολογίστηκε στο 12,5% οπότε, τελικά, $d = (1,72 \pm 0,22) \cdot 10^{25}$ m = $(1,81 \pm 0,23)$ Gyr = (560 ± 70) Mpc.

- vi. Ένα άλλο **σημαντικό ερώτημα** που απασχόλησε τους ερευνητές του LIGO, το οποίο θέσαμε και στους μαθητές/-τριες, ήταν ο υπολογισμός των πιθανών μαζών των δύο μαύρων τρυπών που συγκρούστηκαν. Δεν μπηκάμε σε λεπτομέρειες λόγω της δυσκολίας του θέματος, τους δώσαμε όμως ένα διάγραμμα / ιστόγραμμα των μαζών των δύο μαύρων τρυπών, η σύγκλιση των οποίων έδωσε την πηγή GW151226. Τους πληροφορήσαμε ότι παρόμοιο ιστόγραμμα χρησιμοποιήθηκε και από τους ερευνητές του LIGO (εικόνα 2).

Τους διευκρινίσαμε ότι τα παρακάτω ιστογράμματα δείχνουν πόσο πιθανή είναι κάποια τιμή. Για παράδειγμα, η μεγαλύτερη μαύρη τρύπα (εικ. 2) έχει μάζα κάπου μεταξύ 10 και 22 M_H (M_H = μάζα Ηλίου) με πιο πιθανές τιμές γύρω στα 12-13 M_H .

Το περίγραμμα σε σχήμα «μπαλλάκι», δίνει τον πιθανότερο συνδυασμό τιμών. Για παράδειγμα, υπάρχει 50% πιθανότητα ότι οι τιμές των μαζών είναι αυτές στην περιοχή που περιβάλλεται από το εσωτερικό περίγραμμα της «μπαλλάκι». Κατόπιν τους θέσαμε τα παρακάτω **ερωτήματα**:

- *Ποιο το εύρος των τιμών των μαζών της κάθε μαύρης τρύπας (κατά 50% πιθανότητα). Η απάντηση ήταν εύκολη για τους μαθητές, αφού τα ιστογράμματα και οι αντίστοιχες διακεκομμένες γραμμές τους καθοδήγησαν: M_1 : (11-22) M_H και M_2 : (5,5-9,7) M_H*
- *Κατόπιν τους ζητήθηκε να πάρουν τρία ζεύγη τιμών (M_1, M_2) που η τομή τους να πέφτει μέσα στο 50% της «μπαλλάκι» και για κάθε ζεύγος*

τιμών να υπολογίσουν τη «μάζα σφυρίγματος» M_s και να τη συγκρίνουν με αυτή που είχαν υπολογίσει στο ερώτημα iv). Για παράδειγμα, αν πάρουμε την τιμή $13 M_H$ για τη M_1 και φέρουμε την κάθετο, αυτή προεκτεινόμενη, τέμνει την εσωτερική «μπαράνα». Κατόπιν φέρουμε από το άκρο της, οριζόντια διακεκομμένη προς τη M_2 και βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή $M_2 = 7 M_H$. Άρα, από την εξίσωση 4, προκύπτει $M_s \sim 8,23 M_H$. Άλλα ζεύγη τιμών που μας έδωσαν οι μαθητές/-τριες : **($M_1 = 11 M_H, M_2 = 9 M_H$ και $M_s = 8,65 M_H$)** **($M_1 = 20 M_H, M_2 = 5,5 M_H$ και $M_s = 8,8 M_H$)**. Επιπλέον, τους ζητήσαμε, να πάρουν άλλα τρία ζεύγη τιμών για τις M_1 και M_2 εντός των ορίων των ιστογραμμάτων τους και με την ίδια διαδικασία να υπολογίσουν τις αντίστοιχες M_s . Οι μαθητές μας υπέδειξαν τα παρακάτω ζεύγη:

($M_1 = 15, M_2 = 8$), ($M_1 = 20, M_2 = 6$), ($M_1 = 12, M_2 = 9$)

Για τα παραπάνω ζεύγη να βρεθεί η μάζα σφυρίγματος όπως παραπάνω από την εξ. 4. Τους ζητήσαμε μάλιστα τα ζεύγη αυτά να επιλεγούν έτσι ώστε να βρεθούν και τα «όρια» της M_s . Τους προτρέψαμε να κάνουν και το διάγραμμα μεταβολής της M_s στο Excel. Το αποτέλεσμα ήταν αρκετά καλό καθώς και οι εκτιμήσεις σφάλματος και η αντίστοιχη φυσική ερμηνεία που δόθηκε, ήταν ικανοποιητικά. Στην εικόνα 3 φαίνεται το ιστόγραμμα των αποτελεσμάτων όπως υπολογίστηκαν από τους μαθητές βάση της εξ. 4 για τα ζεύγη που μας πρότειναν.

vii. Στη συνέχεια, τους πληροφορήσαμε ότι παρόμοιοι αλλά πιο ακριβείς υπολογισμοί έδειξαν πως το άθροισμα των μαζών των δύο μαύρων τρυπών (GW151226) σε μάζες Ηλίου M_H , ήταν: $M_1 + M_2 = 21,8 M_H$ με πάνω όριο σφάλματος $+5,9 M_H$ και κάτω όριο σφάλματος $-1,7 M_H$, ενώ η τελική μύρη τρύπα που προέκυψε είχε μάζα $M_T = 20,8 M_H$ με πάνω όριο σφάλματος $+6,1 M_H$ και κάτω όριο σφάλματος $-1,7 M_H$. Η διαφορά ΔM μεταξύ της ολικής αρχικής μάζας και της τελικής μετατράπηκε σε ενέργεια που εκπέμφθηκε σε μορφή βαρυτικών κυμάτων, δηλαδή:

$$\Delta E = \Delta M \cdot c^2 \quad (6)$$

Το μεγαλύτερο μέρος αυτής της ενέργειας εκπέμφθηκε στις τελευταίες στιγμές πριν τη σύγκλιση. Τους ζητήθηκε αρχικά να υπολογίσουν από την εξ. 6 την ενέργεια που εκλύθηκε, χωρίς να λάβουν υπόψη τα όρια σφάλματος, αφού μας ενδιέφερε μόνο η τάξη μεγέθους. Αυτό τους ήταν εύκολο αφού $\Delta M = 1 M_H$ και c η ταχύτητα του φωτός. Προέκυψε $\Delta E = 1,8 \cdot 10^{47}$ Joules. Κατόπιν, τους δόθηκε μια πιο σύνθετη ερώτηση, η εξής: Από την εικ. 1 τους ζητήσαμε να εκτιμήσουν το χρόνο που κράτησε το μέγιστο της εκπομπής και υποθέσαμε ότι όλη η ενέργεια ΔE εκπέμφθηκε σε αυτό το χρονικό διάστημα. Η απάντηση ήταν σχετικά εύκολη αφού είχαν πλέον εξοικειωθεί με την ανάγνωση διαγραμμάτων. Έτσι, μας έδωσαν $\Delta t \sim 10-20$ ms. Άρα, η λαμπρότητα (σε Watts) της πηγής στο μέγιστο ήταν: $L_{max} = \Delta E / \Delta t$ 1 ως $2 \cdot 10^{49}$ Watts. Κατόπιν, τους δώσαμε τη λαμπρότητα του Ήλιου (L_H) και τους ζητήσαμε να κάνουν σύγκριση για να έχουν μια πιο απτή αίσθηση για το συμβάν $L_H = 4 \times 10^{26}$ watts. Άρα: **($L_{max} / L_H \sim 10^{23}$!!** Ενθουσιάστηκαν αλλά και έδειξαν ταυτόχρονα θαυμασμό για τα μεγαλειώδη συμβάντα του Σύμπαντος!

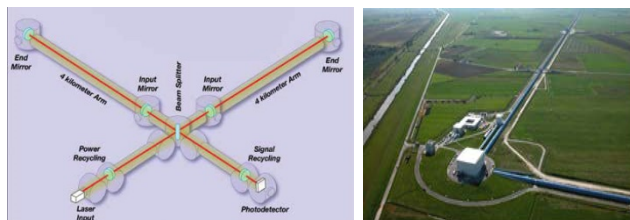
viii. Ακόμη, τους ζητήσαμε να ανακαλέσουν στη μνήμη τους την έννοια του «ορίζοντα γεγονότων» μιας μη περιστρεφόμενης μύρης τρύπας, θεωρώντας ότι αυτή που προέκυψε από τη σύγκλιση, ήταν παρόμοια. Τους δώσαμε την πληροφορία ότι μια μύρη τρύπα μάζας M , που περικλείεται από τον «ορίζοντα γεγονότων» της, έχει ακτίνα που μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση που δίνει την ακτίνα Schwarzschild:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (7)$$

Τους ζητήσαμε να κάνουν και την απόδειξη της εξίσωσης 7, χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Η απόδειξή τους που ήταν η παρακάτω, θεωρήθηκε σωστή για τα αποτελέσματα που αναμέναμε. **Ιδού η απόδειξη:** Έστω R_s η ακτίνα της μύρης τρύπας μάζας M . Από την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, για ένα σώμα μάζας m που εκτοξεύεται από το όριο του ορίζοντα γεγονότων της μύρης τρύπας (ακτίνα R_s) με ταχύτητα u , για να φτάσει μέχρι το άπειρο με μηδενική ταχύτητα, έχουμε: **$-(GMm/R_s) + 1/2(mu^2) = 0$** , όπου οι όροι αριστερά δηλώνουν τη δυναμική βαρυτική ενέργεια της μάζας m καθώς και την κινητική της τη στιγμή της εκτόξευσης, ενώ ο όρος δεξιά υποδηλώνει τη μηδενική κινητική και δυναμική ενέργεια της μάζας m σε άπειρη απόσταση. Αν το εκτοξευόμενο σώμα έχει ταχύτητα **$u \sim c$** , τότε **$GMm/R_s \sim 1/2 mc^2 \Leftrightarrow R_s = (2GM)/c^2$** .

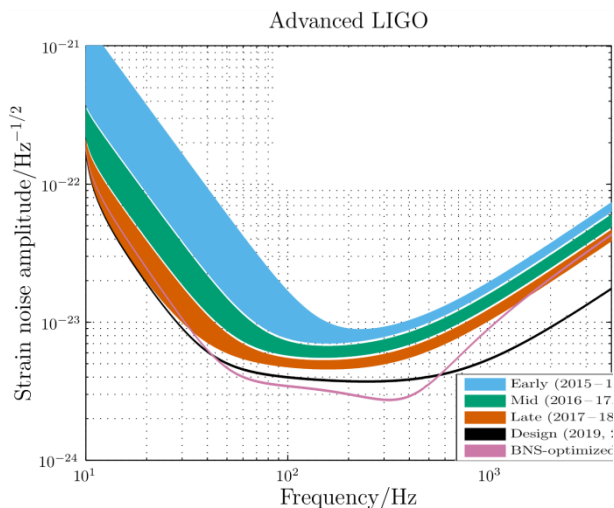
Τους είπαμε να υπολογίσουν την ακτίνα της νέας μύρης τρύπας που προέκυψε από τη σύγκλιση του ζεύγους των μαύρων τρυπών της πηγής GW151226. Ανταποκρίθηκαν εύκολα και αντικαθιστώντας στην εξ. 7, $M = 20,8 M_H$ και κάνοντας πράξεις βρήκαν $R_s \sim 62$ km, δηλαδή λίγο μεγαλύτερη από την απόσταση Βόλου- Λάρισας!

ix. Ένα, επίσης, από τα θέματα που μας ενδιέφερε και θέλαμε να προκαλέσουμε την προσοχή των μαθητών/-τριών ήταν η ευαισθησία του ανιχνευτή LIGO σε σχέση με τη συχνότητα $f = (1/P_{GW})$ του βαρυτικού σήματος και την τρομερή δυσκολία ανίχνευσης τόσο ασθενών κυματισμών στο χωροχρόνο. Τους πληροφορήσαμε ότι το «πείραμα» που ανίχνευσε τις δύο πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας σε διάστημα λίγων μηνών, είναι ένα εξαιρετικά ευαίσθητο όργανο που απαιτεί πολύ ισχυρά laser, απόλυτο κενό αέρα και ακριβή γνώση της παραμικρής πηγής «θορύβου», αφού προσπαθεί, όπως πιστοποίησαν, να μετρήσει μεταβολές της τάξης των 10^{-22} m!



Εικόνα 4: Σχηματική αναπαράσταση και φωτογραφία του LIGO

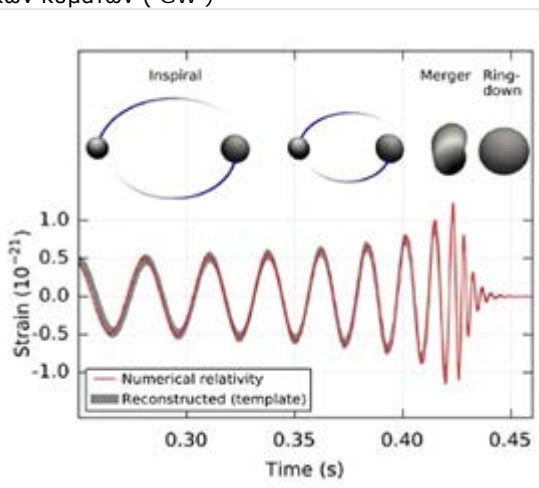
Τους δώσαμε, επίσης, μία εικόνα της σχηματικής αναπαράστασης του LIGO (εικ. 4), καθώς επίσης και μία εικόνα όπου φαίνεται η ευαισθησία του LIGO ως συνάρτηση της συχνότητας f του βαρυτικού σήματος (εικ. 5). Στον κατακόρυφο άξονα δίνεται το πλάτος του σήματος που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη συχνότητα, διαιρεμένο με την τετραγωνική ρίζα της συχνότητας, δηλ. $A(f)/f^{1/2}$. Αυτό είναι το μέτρο του πόσο «καλό» είναι το σήμα σε σχέση με το «θόρυβο» υποβάθρου.



Εικόνα 5: Ευαισθησία LIGO ως συνάρτηση της συχνότητας του GW σε διαφορετικά στάδια της λειτουργίας του

Κατόπιν, τους θέσαμε τα παρακάτω **ερωτήματα**: Στην κυματομορφή του GW151226, χρησιμοποιήστε την περίοδο του σήματος P_{GW} στην αρχή της ανίχνευσης και το πλάτος της ταλάντωσης ($P_{GW} = 0,008/3$ s. και $A = 0,8 \cdot 10^{-22}$ m) και βρείτε την f και την $A/f^{1/2}$ και σχεδιάστε στην εικ. 3 το σημείο Σ_a χρησιμοποιώντας τις παραπάνω συντεταγμένες. Πράγματι, εύκολα, βρήκαν: $f = (1/P_{GW}) = 37,5$ Hz και $(A/f^{1/2}) = 1,3 \cdot 10^{-23}$ m.s.^{1/2}. Άρα, το Σ_a προσδιορίζεται ως Σ_a (40 Hz, 10^{-23}), δηλαδή **λίγο κάτω** από τη γαλάζια μπάντα που ήταν η ευαισθησία του ανιχνευτή στις αρχές του 2015 !

Τους δώσαμε ακόμη μία εικόνα (εικ. 6) της κυματομορφής GW150914 (η πρώτη πηγή που εντοπίστηκε στις 14-09-2015). Στην εικόνα αυτή ο χρόνος αυξάνει όσο πλησιάζουμε στη σύγκλιση. Δίνονται, επίσης, σχηματικά τα διάφορα στάδια της τροχιάς και σύγκλισης των δύο μαύρων τρυπών όπως αυτά αντιστοιχούν στα διάφορα στάδια του σήματος. Η ανάλυση των δεδομένων έδειξε πως πρόκειται για δύο μαύρες τρύπες με μάζες περίπου $M1 \sim 36$ ΜΗ και $M2 \sim 29$ ΜΗ που όταν συνέκλιναν έδωσαν μία μαύρη τρύπα με τελική μάζα $Mf \sim 62$ ΜΗ και έλλειμα μάζας 3ΜΗ που μετατράπηκε σε ενέργεια βαρυτικών κυμάτων (GW)



Εικόνα 6: Κυματομορφή GW150914

Ύστερα, τους κάναμε την εξής ερώτηση: Στην εικ. 6, υπάρχει η κυματομορφή της πρώτης χρονικά πηγής βαρυτικών κυμάτων (GW150914) που ανακαλύφθηκε . Επαναλάβετε τα βήματα της προηγούμενης ερώτησης για την αρχή του σήματος αυτής της πηγής και σχεδιάστε το αντίστοιχο σημείο Σ_b στο γράφημα της εικόνας 5, αφού

πρώτα προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του. Η απάντησή τους ήταν πλέον εύκολη, αφού ήταν ήδη γνωστή η $P_{GW} = 0,03$ s., η $f = (1/P_{GW}) = 33$ Hz καθώς και το πλάτος $A = 0,5 \cdot 10^{-21}$ m, οπότε:

$$(A/f^{1/2}) \approx 0,9 \cdot 10^{-22} \text{ m.s}^{1/2}$$

Άρα, το σημείο Σ_b (~30 Hz, ~ 10^{-22}) είδαν ότι ήταν **πάνω** στην γαλάζια μπάντα, δηλαδή **εντός της περιοχής ευαισθησίας** του οργάνου ανίχνευσης στις αρχές του 2015! Συνεπώς, η δεύτερη πηγή GW151226, φαίνεται πως δεν θα έπρεπε να είναι ανιχνεύσιμη, αν και ανιχνεύτηκε! Το αιτιολόγησαν ως αποτέλεσμα των προσεγγιστικών υπολογισμών και των σφαλμάτων που εισχώρησαν καθώς και στην παντελή έλλειψη «θορύβου υποβάθρου» εκείνη τη στιγμή!

Επιπροσθέτως, τους δόθηκαν **δύο ακόμη ερωτήσεις** που αφορούσαν την ευαισθησία των ανιχνευτών. Συγκεκριμένα, τους ζητήσαμε να «προβλέψουν» πώς θα κινηθούν αυτά τα δύο σημεία (Σ_a και Σ_b) στο γράφημα της εικ. 5, καθώς οι δύο μαύρες τρύπες πλησιάζουν όλο και περισσότερο μεταξύ τους; Από τις απαντήσεις που πήραμε, ξεχώρισε μία που θεωρήθηκε πολύ καλή. Η απάντηση αυτή έλεγε πως τα δύο σημεία θα κινηθούν προς τα δεξιά και περίπου παράλληλα με τον οριζόντιο άξονα. Τους επισημάναμε ότι στο τέλος, το πλάτος του σήματος έχει περίπου τριπλασιαστεί και η συχνότητα της πηγής GW151226, έχει δεκαπλασιαστεί.

Τέλος, στο ερώτημά μας γιατί δεν βλέπουμε το σήμα των δύο πηγών σε πιο νωρίτερο στάδιο της τροχιάς των δύο συγκλινόντων μαύρων τρυπών, οι απαντήσεις τους δεν ήταν ξεκάθαρες. Τότε, τους υποδείξαμε ότι η συχνότητα του σήματος είναι πιο χαμηλή λόγω της απόστασης που βρίσκονταν μεταξύ τους οι μαύρες τρύπες και συνεπώς το σήμα βρίσκεται στην περιοχή όπου η ευαισθησία του LIGO χειροτερεύει απότομα με τη συχνότητα (βλέπε εικ. 5)

Επιμείναμε στις ερωτήσεις «πρόβλεψης» με βάση το μοντέλο της σύγκλισης των μαύρων τρυπών που είχαν, καθώς και της δεδομένης ευαισθησίας των οργάνων ανίχνευσης (LIGO). Έτσι, τους δόθηκε η πληροφορία ότι το 2015, οι ανιχνευτές LIGO λειτουργήσαν συνεχώς για 39 ημέρες και κατόρθωσαν να ανιχνέψουν δύο (2) πηγές βαρυτικών κυμάτων. Τους είπαμε να υποθέσουν πως παρόμοιες πηγές ζευγών μαύρων τρυπών βρίσκονται **ομοιόμορφα** καταμεμημένες στο παρατηρήσιμο Σύμπαν, δηλαδή ότι η πυκνότητα των ζευγών αυτών είναι σταθερή. Πόσες, συνεπώς, παρόμοιες πηγές θα ανίχνευε το LIGO αν λειτουργούσε συνεχώς για ένα (1) χρόνο με τις ίδιες προδιαγραφές; Η απάντηση των περισσότερων ήταν άμεση και σωστή: $(365/39) \times 2 = 18$ μαύρες τρύπες!

Τους είπαμε ακόμη ότι το φθινόπωρο του 2016 το LIGO επαναλειτουργήσε με βελτιωμένη ευαισθησία. Αυτή δίνεται από την πράσινη μπάντα στην εικ. 5, ενώ η ευαισθησία του 2015 δίνεται από τη γαλάζια μπάντα και ότι το χαμηλότερο τμήμα της κάθε μπάντας, δίνει τα αντίστοιχα όρια της ευαισθησίας τους. Το ερώτημα, λοιπόν, που τέθηκε, ήταν:

Πόσες πηγές, παρόμοιες των GW150914 και GW151226, θα πρέπει να περιμένουμε να ανιχνευτούν ; Δυσκολεύτηκαν να δώσουν μια αποδεκτή απάντηση. Τότε τους υποδείξαμε να παρατηρήσουν ότι στη συχνότητα των 60 Hz, το **όριο** ανίχνευσης το 2015 ήταν περίπου 10^{-23} , ενώ το 2016 έγινε $0,7 \times 10^{-23}$ m.s.^{1/2}, δηλαδή πλάτη 0,7 πιο χαμηλά θα μπορούσαν να ανιχνευτούν. Όμως, επειδή το «πλάτος» σε m.s.^{1/2} του κύματος G.W. είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης (d) της πηγής παραγωγής, δηλαδή $A \sim (1/d)$, καθοδηγούμενοι από εμάς, βρήκαν ότι παρόμοιες πηγές μπορούσαν να ανιχνευτούν (1/0,7) φορές πιο μακριά! Άρα, θα μπορούμε να ανιχνεύσουμε $(1/0,7)^3 \approx 3$ φορές μεγαλύτερο όγκο χώρου, δηλαδή: $3 \times 18 = 54$ πηγές (!) με βάση και το αποτέλεσμα της προηγούμενης ερώτησης. Αυτό προφανώς θα ήταν το ανώτατο όριο .

Τους προτρέψαμε ακόμη να πειραματισθούν και με άλλες συχνότητες (π.χ. 40 Hz – 50 Hz) και να ελέγξουν αν

το πλήθος των ανιχνεύσιμων πηγών είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, πράγμα που εύκολα το πιστοποιήσαν ακολουθώντας τα ίδια βήματα. Συνεχίζοντας το «παιχνίδι» των προβλέψεων, τους δώσαμε μία ακόμη πληροφορία και τους θέσαμε και μία τελευταία ερώτηση. Συγκεκριμένα, τους είπαμε ότι οι μάζες των δύο μαύρων τρυπών του πρώτου συμβάντος GW150914 ήταν περίπου 36 και 30 M_H , ενώ βρίσκονταν σε απόσταση 400 Mpc από εμάς. Τους πληροφορήσαμε ακόμη ότι σύμφωνα με τα υπάρχοντα μοντέλα, περιμένουμε πως οι περισσότερες μαύρες τρύπες έχουν μάζες 5 ως 10 M_H .

Τέλος, τους θέσαμε την ερώτηση: τέτοιου μεγέθους μαύρες τρύπες (5-10 M_H) που θα βρίσκονται σε αποστάσεις της τάξεως των 400 Mpc, θα είναι ευκολότερα ή δυσκολότερα ανιχνεύσιμες όταν συγκλίνουν, σε σχέση με τις πηγές GW150914 και GW151226; Τους καθοδηγήσαμε να σκεφτούν ότι η ανίχνευση εξαρτάται από το πλάτος (εξ. 5) και τη συχνότητα f . Ένα σύστημα θα είναι παρατηρήσιμο από τη στιγμή που η συχνότητά του θα ξεπεράσει τις μερικές δεκάδες Hz (π.χ. 30-40-50 Hz).

Επίσης, τους είπαμε ότι το πλάτος του σήματος δίνεται από την:

$$A \sim [(M_1 M_2) / (M_1 + M_2)]^{1/3}$$

(όπου \sim σημαίνει ανάλογο) Αν, λοιπόν, συγκριθεί το πλάτος (A) δύο ίσων μαζών με 5 και 5 M_H , που συγκλίνουν, με το πλάτος του κύματος που προέκυψε από τις μάζες των 30 και 36 M_H που συγχωνεύτηκαν, βρίσκουμε ότι είναι 30 φορές μικρότερο! Άρα είναι εξαιρετικά δύσκολο, με την παρούσα ευαισθησία, να ανιχνεύσουμε τέτοια συστήματα μικρών μαζών σε αποστάσεις των 400 Mpc. Θα ήταν, όμως, ανιχνεύσιμα, όπως κάποιος εύστοχα παρατήρησε, σε αποστάσεις 30 φορές πιο κοντινές, δηλαδή στα 12 με 15 Mpc! Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι για να απαντηθούν όλες οι παραπάνω ερωτήσεις που τέθηκαν, είχαν δοθεί οι απαιτούμενες σταθερές καθώς και οι ισοδυναμίες των διαφόρων μονάδων.

4. Συμπεράσματα – Αξιολόγηση της πρότασης

Εφαρμόζοντας τη διδακτική αυτή πρόταση τρεις συνεχόμενες χρονιές στο χειμερινό σχολείο αστρονομίας και εν μέρει σε ένα θερινό σχολείο αστρονομίας, διαπιστώσαμε ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα στοιχεία:

- Οι μαθητές/-τριες έδειξαν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον για το συγκεκριμένο διδακτικό σενάριο, αφού η ανακάλυψη των βαρυτικών κυμάτων είχε ήδη πάρει μεγάλη δημοσιότητα και ήταν ένα θέμα που από την αρχή κέντρισε το ενδιαφέρον τους.
- Διαπιστώσαμε ότι, αν και οι μαθητές δεν είχαν ξαναεμπλακεί με ενεργό τρόπο, σε ένα τόσο α-

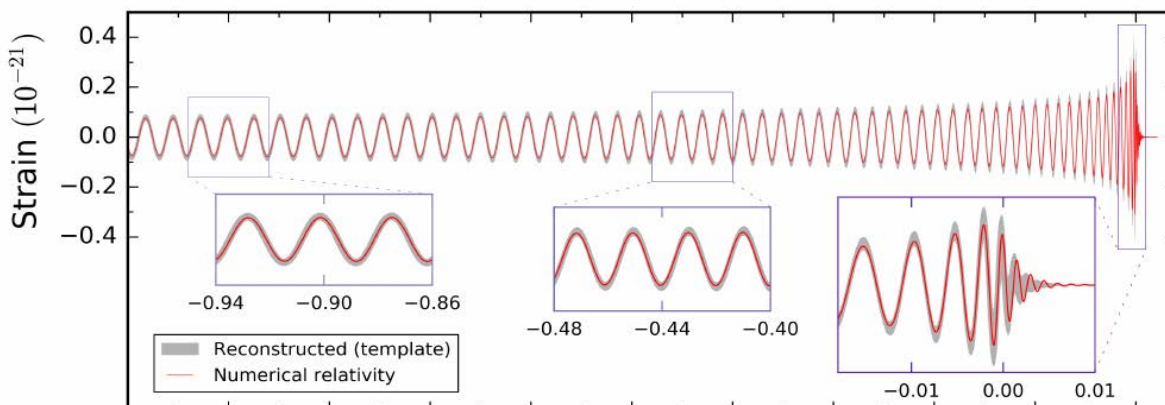
παιτητικό διδακτικό σενάριο με αρκετές δυσκολίες κατανόησης, ήταν εξαιρετικά πρόθυμοι και περίεργοι να παίξουν το ρόλο του ‘μικρού ερευνητή’ και να βαδίσουν στα χνάρια των ερευνητών –επιστημόνων του πειράματος LIGO.

- Διαπιστώσαμε το μεγάλο ενδιαφέρον τους για σύγχρονα επιστημονικά προβλήματα και θέματα υψηλής τεχνολογίας, τα οποία μπορούν να γίνουν κτήμα τους όχι αποστηθίζοντας πληροφορίες, αλλά συμμετέχοντας ενεργά στη δόμηση της νέας γνώσης.
- Διαπιστώσαμε, ακόμη, τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές/-τριες στην κατανόηση και χρήση διαγραμμάτων και ιστογραμμάτων που δεν περιγράφονται από τις γνωστές τους μαθηματικές συναρτήσεις, τις νοητικές αντιστάσεις και δυσκολίες στην κατανόηση του ρόλου των σφαλμάτων στις μετρήσεις, στην κατανόηση των ορίων της ευαισθησίας των οργάνων ανίχνευσης και του θορύβου υποβάθρου.
- Διαπιστώσαμε ευχάριστα ότι, αν και δεν τους είχε ποτέ ζητηθεί να κάνουν «προβλέψεις» σε επιστημονικά «γεγονότα», έμειναν ενθουσιασμένοι από τα ευρήματά τους.

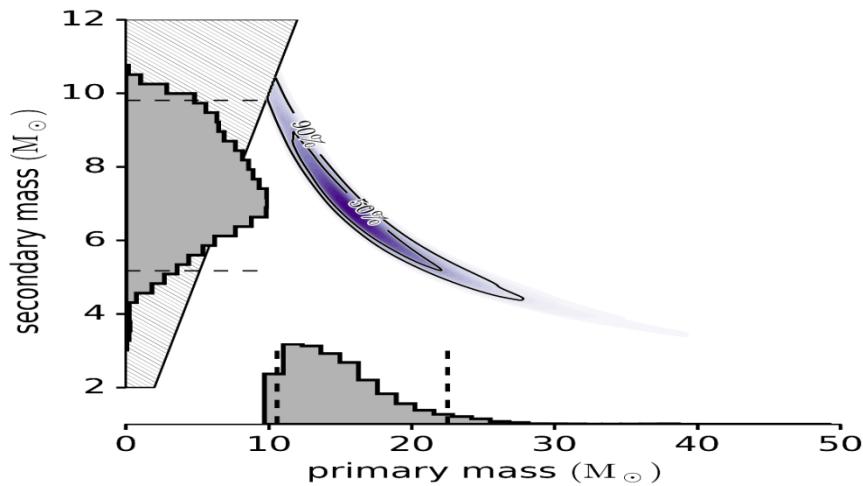
Επίσης, η ανάλυση επιστημονικών δεδομένων και η ανάπτυξη ερμηνευτικών μοντέλων, ήταν πρωτόγνωρη και ευχάριστη γι’ αυτούς, παρόλο που το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα δεν εξοικειώνει τους μαθητές/-τριες με επιστημονικές μεθόδους, όπως η «ανάλυση δεδομένων» και δεν τους δίνει τις απαραίτητες δεξιότητες που απαιτούνται γι’ αυτό.

Τέλος, διαπιστώσαμε ότι ανέπτυξαν συνδυαστική και κριτική σκέψη καθώς και θετικές στάσεις απέναντι στην αστρονομία, την αστροφυσική και την τεχνολογία αιχμής. Σε ορισμένους, μάλιστα, γεννήθηκαν έντονα ερωτήματα για τη χρησιμότητα των βαρυτικών κυμάτων, οπότε, με δική μας προτροπή, τους υποδείξαμε να αντλήσουν πληροφορίες για τον ανατέλλοντα νέο κλάδο της επιστήμης, την «αστρονομία βαρυτικών κυμάτων» και τις δυνατότητες που αυτή προσφέρει για βαθύτερη μελέτη του Σύμπαντος!

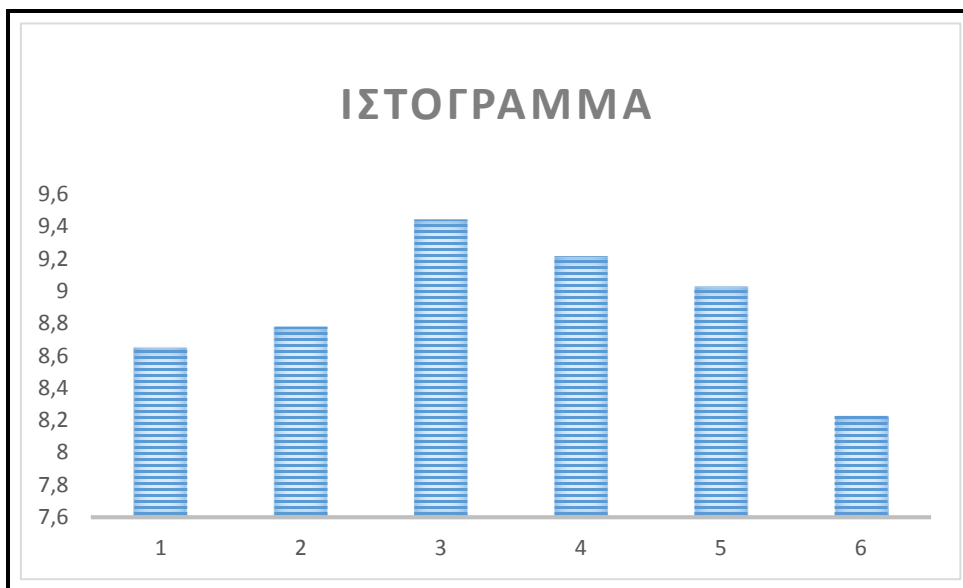
Συνεπώς, όλοι οι στόχοι που είχαμε θέσει, νομίζουμε ότι επιτεύχθηκαν ως ένα βαθμό, άλλοι πλήρως και άλλοι μερικώς, εκείνο όμως που έχει σημασία είναι η εμπλοκή των μαθητών/-τριών σε ρεαλιστικά – διερευνητικά διδακτικά σενάρια όπου, όπως διαπιστώσαμε, ανταποκρίνονται με αρκετή ευκολία και ευχαρίστηση αποκομίζοντας στο τέλος όχι μόνο νέες γνώσεις και δεξιότητες αλλά και θετικές στάσεις και προσδοκίες.



Εικόνα 1: Η κυματομορφή βαρυτικού κύματος πηγής GW151226



Εικόνα 2: Ιστογράμμο μαζών δύο μαύρων τρυπών όπως χρησιμοποιήθηκε στο LIGO



Εικόνα 3: Ιστογράμμο μεταβολής της «μάζας σφυρίγματος» για (6) πιθανά ζεύγη συγκρουόμενων μαύρων τρυπών

6. Βιβλιογραφία

Ματσαγγούρας, Η., 2004: Η Διαθεματικότητα στη Σχολική γνώση, εκδόσεις Γρηγόρη, Αθήνα.
 Ματσαγγούρας, Η., 2012 (επιστημονικός υπεύθυνος): Η καινοτομία της ανακαλυπτικής μάθησης στο νέο Γυμνάσιο, έκδοση ΥΠΕΠΘ.
 Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός Αστρονομίας και Αστροφυσικής, 2016/ 4η φάση ‘Πτολεμαίος’/ Ανάλυση Δεδομένων.
 Παχούλη, Α., 2016: Πλαίσιο Σχεδιασμού και Αναφοράς Σεναρίου στο σχολείο. Πρακτική Άσκηση Εκπαιδευομένων στο ΠΑΚΕ Αττικής.
 Ψυχάρης, Σ.- Καλοβρέκτης, Κ., 2018: Διδακτική και Σχεδιασμός Εκπαιδευτικών Δραστηριοτήτων STEM και ΤΠΕ, εκδόσεις Τζιόλα, Αθήνα.
 Flick, L.B. and Lederman, N.G., 2001: Scientific Inquiry and Nature of Science, εκδόσεις Springer.
 Papert, S., 1992: The Children’s Machine. New York.
 The Pathway project, 2013: Science education through inquiry in schools, museums and informal learning settings. Retrieved from: <http://www.pathwayuk.org.uk>
 Spanos, S. and Xenakis, C., 2013: Learning Astronomy through inquiry and by means of Self-

Constructions, Published by Astronomy and Space Society and Ellinogermaniki Agogi, Athens.

Ιστοαναφορές

<http://www.ligo.org/science/PublicationGW151226/index.php>
<http://www.ligo.org/science/Publication-01Noise/index.php>
http://www.lsc.ligo.org/events/GW150914/wikipedia/gravitational_waves_Wikipedia/LIGO/photos